PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
FIZIKAI INTÉZET

Méréstani összefoglaló

(környezettudományi szakos hallgatók laboratóriumi mérési gyakorlataihoz)

Összeállította:

Dr. Német Béla

Pécs
2008

Bevezetés

Ez rövid méréstani összefoglaló, amely környezettudományi szakos hallgatók laboratóriumi mérési gyakorlatait tartalmazó segédlethez csatlakozik.

Tartalmazza a legalapvetőbb méréstani fogalmakat, szó van benne az egyes mennyiség mérési eredményeinek kiértékeléséről, (a hibaszámításról), két mennyiség közötti kvantitatív kapcsolat felismerésének módszeréről (a paraméterbecslésről).

Pécs, 2008. január 20.

A szerző

1. Alapvető fogalmak a mérésről

1.1. Méréstani alapfogalmak

A **mérés (a mérési folyamat):** összehasonlítás**.** A kísérlet lefolyásának egy része. A mérés során a vizsgált test, a lehetőségekhez képest jól definiált környezetben van. A mérés során mérőeszközt használunk, amikor is egy *mérési eljárással* meghatározzuk a vizsgált test, esemény jellemző fizikai mennyiségének X, adott mértékegységben [X], a mérőszámát {X}, a mérési körülmények által meghatározott értékes jegyre. Ezt az eredményt a következőképpen írjuk fel általánosan:

$$X=\{X\}\,[X] \qquad (1.1)$$

Tehát a mérési folyamat három fő eleme:
- -a mérendő objektum,
- -a mérési eljárás,
- -a mérési eredmény.

A **mérési eljárás** olyan feldolgozás, amely során a jeleket a mérés célkitűzésének megfelelő alakra hozzuk.

Lépései:
- -becslési eljárás,
- -döntési eljárás.

Egyszerű mérési eljárások:
- -etalonillesztés (skalár jellegű mennyiségeknél),
- -kompenzációs módszer (Pl. mérendő erőt kompenzáljuk a dinamométer feszültségével, mérendő áramot kompenzáljuk egy másik áramkör áramával),
- -helyettesítési módszer.

Az **etalon** valamely mérhető mennyiség mértékegységének megadására, megőrzésére, vagy reprodukálására szolgáló eszköz, amely mértékegységének más mérőeszközre való továbbszármaztatására szolgál.

A **mérőeszköz** a mérési eljárást realizálja, a mérendő objektumból származó jeleket átalakítja, tartalmazza a méréstől elválaszthatatlan "skálainformációt".

A mérőeszközök kategóriái:
-mérőműszer,
-mérőkészülék,
-mérőrendszer.

A **mérőműszer** olyan mérőeszköz, ahol elmarad az információ feldolgozási funkció.

A **mérőkészülék** olyan mérőeszköz, ahol nagyjából egyforma a mérőhálózat és az információ feldolgozó bonyolultsága.

A **mérőrendszer**nél jelentős túlsúlyba kerülnek az információ feldolgozási funkciók.

1.2. A mérőműszer legfontosabb jellemzői

A **mérőműszer** a mérendő mennyiséget közvetlenül mérhető jellé (pl. hosszúsággá, szögelfordulássá, számokká) alakítja. Az átalakítást a műszer mutatójának a kitérése, újabban a számkijelző számainak értékei (α), és a mérendő mennyiség (x) között a skálakarakterisztika függvény, α=f(x) írja le.

A műszer **érzékenysége** (E) a kimenő jel megváltozásának [$\Delta\alpha$] ás a bemenő jel megváltozásának [Δx] a hányadosa, ill. a skálakarakterisztika függvény [α =f(x)] deriváltja:

$$E = \frac{d\alpha}{dx} \tag{1.2}$$

Az érzékenység reciproka a **műszerállandó**:

$$C = \frac{1}{E} \tag{1.3}$$

<u>Megjegyzések</u>: Mivel az átlag ember szabad szemmel egy mutató mozgását elfogadhatóan kb. 1 mm-nél nem sűrűbb beosztású skála előtt tudja leolvasni, így a műszerállandó számértéke megadja a mérendő fizikai mennyiség azon legkisebb értékét, amely "léptékben" tudunk különbséget tenni a két mért érték között. Szokták a műszerállandót redukciós faktornak, vagy felbontóképességnek is nevezni. Eszerint felbontóképesség az a legkisebb jelkülönbség, amit még megkülönböztetünk (így általában 1 skr, vagy fél skr.).

A **mérőműszer mérési tartománya** megadja a jelátalakítási képességének a mértékét, megadja a legkisebb és a legnagyobb jelnek a nagyságát, amely jelek átvitelére a műszer még képes.

Megjegyzések: Az alsó méréshatárt pl. úgy lehet megadni, hogy a relatív hiba még ne legyen nagyobb, mint 10%. A felső méréshatárt pedig úgy célszerű megválasztani, ahol a mérés során a műszert ért terhelés még semmilyen maradandó károsodást nem okoz. Egy műszer annál jobb, minél nagyobb a mérési tartománya és minél érzékenyebb.

A **mérőműszer pontossága** (annak egy mérési tartományán) az abszolút hibájának ($\Delta = |X_k - X_m|$) és a mérendő mennyiség egy un. konvecionális értékének (X_k) a hányadosa:

$$h_{rel}(\%) = \frac{\Delta}{x_k} \approx \frac{C}{x_k^{felsõ}} \qquad (1.4)$$

Megjegyzés: Az abszolút hiba közelíthető a felső méréshatár közelében a készülékállandóval. Pl.: egy dinamométer pontossága=1%, ha a dinamométer mérési tartományán 100 mm-t nyúlik meg, 1 mm-es a beosztás és 1 mm-es léptéknél finomabb leolvasás nem végezhető.

1.3. A mérési eredményeket befolyásoló tényezők

A **mérési hiba** az ideális mérési eredménytől (a valódi értéktől - M) vett eltérés mértéke.

A hibák származhatnak:
- a megfigyelés (mérés) körülményeiből,
- a mérőeszközből,
- a mérési folyamatot befolyásoló külső zavarokból.

A mérési hibák típusai:
- abszolút hiba,
- relatív hiba,
- rendszeres hiba,
- véletlen hiba.

Az **abszolút hiba** (Δ) a mérendő mennyiség *valódi érték*ének (M) és a méréssel meghatározott (*várható*) *érték*nek (X) a különbsége:

$$\Delta = M - X \qquad (1.5)$$

A **relatív hiba** (∇) az abszolút hiba és a mérendő mennyiség várható értékének a hányadosa 100-zal megszorozva, százalékos alakban megadva:

$$\nabla = \frac{\Delta}{x} 100\% \qquad (1.6)$$

Megjegyzés: Elektromechanikus műszernél (de ez vonatkoztatható hosszúságmérő eszközökre, dinamométerekre is) általában a végkitérésre vonatkoztatott relatív hibát adják meg, amely egyben a műszer pontossági osztálya.

A **rendszeres (szisztematikus) hiba** olyan ok következménye, amely rendszeresen, meghatározott irányban fejti ki hatását.

Megjegyzés: A rendszeres hibák okai elvileg felismerhetők, velük megfelelően korrigálható a mérési eredmény, vagy megszűntethető a hibaforrás.

A **véletlen hiba** olyan ok(ok) következménye, amely(ek) rendszertelenül, változó irányban fejti(k) ki hatásukat.

Megjegyzések: Nem lehet a véletlen hibát előre figyelembe venni. Leírásával a hibaszámítás foglalkozik, a számítás végeredménye a hibát, mint konfidencia intervallumot adja meg. Egy mérésből két ismeretlen: Δ és M egyszerre nem határozható meg. Ezek becslését többszöri mérés adatából a konfidencia számítás (valószínűség számítás) szerint kaphatjuk meg.

A mérés pontosságát és szabatosságát a következőképpen lehet értelmezni:

A **mérés pontossága** a mérési hiba (szisztematikus+véletlen) és a mért mennyiség hányadosával van definiálva.

A **mérés szabatossága** a mért értékek egy sorozatának átlaga, valamint egy konvencionális érték közti különbség és az átlag hányadosával van definiálva.

Megjegyzés: Egy mérőeszköz, ill. egy mérési eljárás szolgáltathat nagyon szabatos eredményt, de nem pontosat, azaz a mérés elég kis szórással végezhető el (a véletlen hibáknak kicsi a szórásuk), de nem pontosan (azaz valamilyen szisztematikus hiba az átlag értéket jelentősen eltéríti a konvencionális értéktől.

1.4. A mérési adatok kiértékeléséről. A hibaszámítás alapfogalmai.

A fizikai mennyiség valódi értékének (M), valamint a mérés abszolút hibájának (Δ) a mérési eredményekből, számítással történő megállapítása a valószínűség számítás szerint úgy lehetséges, hogy megadjuk a méréseredmények valószínűségi eloszlását (ilyen eloszlás sokféle lehet: normális-, binomiális-, Poisson-, exponenciális-, stb...), miközben a mért adatot valószínűségi váltózónak tekintjük.

A fizikai mennyiségek mérés eredményeinek túlnyomó többsége **normális eloszlás**t mutat, amelyet az un. **Gauss-függvény** ír le:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (1.7)$$

ahol: σ- az inflexiós pont helye - **szórás**,
μ- a valószínűségi változó **várható értéke**.

Megjegyzések: Az *f(x)* függvényben szereplő paraméterek μ és σ szolgálnak az M és a Δ becslésére (számítására). A μ és a σ értékeket kétféleképpen kaphatjuk meg:
- vagy nagyon nagy számú mérés eredményét ábrázoljuk, és ezekre Gauss-függvényt illesztünk,
- vagy további becsléssel élünk:

A **várható érték számítása** a következő integrállal történhet:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (1.8),$$

amelynek legjobb becslése a **számtani közép (*x*)**:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \qquad (1.9)$$

ahol n - a mérések száma,
x_i - az i-dik mérés értéke.

Tétel: A szórás, azaz az egyes észlelések pontosságának becslése a **standard deviáció**val, az un. korrigált tapasztalati szórással történik:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}} \qquad (1.10)$$

Tétel: A mérések középértékének, a várható értéknek a pontosságát a **standard hiba**, (az átlagérték standard deviációja) adja:

$$\boxed{s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad (1.11)$$

Megállapodás: A mérési eredmények megadási formája: Egy fizikai mennyiség várható értékének közelítését akkor adjuk meg jól (kerekítéssel), ha annyi (n darab) értékes (helyes) jegyet írunk le, hogy a mérés standard hibája ne haladja meg az n-dik (tehát utolsó) jegy helyi értékének a felét. Ennek általános alakja a következő:

$$\boxed{M = x \pm s_{\bar{x}}} \qquad (1.12).$$

2. A vizsgált függvény kapcsolat "felismerésének" egyszerű esetei.

Két mennyiség között (*y* és *x* között), matematikailag legegyszerűbb a lineáris függvénykapcsolat. Az egyenes egyenletének általános alakja:

$$\boxed{y = mx + b} \qquad (2.1),$$

ahol m - az egyenes meredeksége,
b - az x=0 érték esetén az ordináta és az egyenes metszéspontja.

Megjegyzések: Gyakran a függvény kapcsolatok, ha nem is lineárisak, függvény transzformációval linearizálhatók, (most csak ilyen esetekkel foglalkozunk).

Egyenes egyenletére vezető egyszerű függvény transzformáció hatványkitevős és exponenciális függvények esetében az, ha mindkét oldal logaritmusát képezzük. Ezzel elérjük, hogy a kitevőben szereplő konstansok (n, B) az így "létrejött" egyenes meredekségeként jelennek meg. A tengelymetszetekből (lnk, lnA) pedig a függvénykapcsolat együtthatói olvashatók le:

hatványkitevős alak: $\boxed{y = kx^{n}}$ $\quad \ln y = n \ln x + \ln k \qquad (2.2)$

exponenciális alak: $\boxed{y = Ae^{Bx}}$ $\quad \ln y = Bx + \ln A \qquad (2.3).$

Megjegyzések: Ha a méréseredményeket (x_i, y_i), mint pontokat ábrázoljuk milliméterpapíron és az *y=f(x)* között a kapcsolat lineárisnak "látszik", a "kiértékelés" legegyszerűbb esetben történhet csak vonalzóval is ("szemmértékkel" húzunk egyenest).

A paraméterbecslésről általában (olvasmány)

A mérési eredményekre illeszthető "legjobb" egyenes "kiválasztásának" matematikai módszere a lineáris regresszió számítás, a paraméterbecslés. Ezzel kapcsolatos fogalmak és legegyszerűbb eljárások a következők:

Paraméterbecslés az az eljárás, amellyel a feltételezett *y=f(x,p)* függvényt a *p* paraméterek megfelelő választásával a mért *y* adatokra illesztjük.

Célfüggvény (Qp), amely a becslés következtében létrejövő eltérés mértékét adja meg.

Megjegyzés: Leggyakrabban a célfüggvényt az un. **legkisebb négyzetek (LKN) módszerével** adják meg a következőképpen:

$$Q_p = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, p)]^2 w_i \qquad (2.4)$$

ahol w_i az i-edik mérés súlyát jelenti.

Paraméterbecslés lineáris regresszióval. A legkisebb négyzetek módszere. (olvasmány)

Lineáris regresszió az az eljárás, ha az *f(x,p)* a paraméterek lineáris függvénye.

Ebben az esetben meghatározandó a mérési adatokból annak az egyenesnek az iránytangense (m) és tengelymetszete (b), amely a Gauss-féle LKN módszerrel számolható ki. Ekkor a célfüggvény alakja a következő, melynek minimum helye adja a keresett paramétereket:

$$Q_p = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, m, b)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2 = \min. \qquad (2.5)$$

A keresendő paraméterek, *m* és *b* (mint változók) úgy számolhatók ki, hogy a Q_p függvény ezen "változók" szerinti parciális deriváltjait egyenlővé kell tenni zérussal. Ennek a számolásnak a végeredményei a következők:

$$b = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i] = \overline{y} - m\overline{x} \qquad (2.6)$$

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad (2.7).$$

Tartalomjegyzék

1. Alapvető fogalmak a mérésről 2
1.1. Méréstani alapfogalmak 2
1.2. A mérőműszer legfontosabb jellemzői 3
1.3. A mérési eredményeket befolyásoló tényezők 4
1.4. A mérési adatok kiértékeléséről. A hibaszámítás alapfogalmai 5
2. A vizsgált függvény kapcsolat "felismerésének" egyszerű esetei 7

Pécs, 2008. január 20.
Dr. Német Béla